数理解析研究所講究録
369巻 1979年 122-127

$\pi_2(M^4)$ の elements の separating problem

広島大理 大川 哲介

① 問題 4次元多様体 M^4 の2次元ホモトピー群の元達 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\mu \in \pi_2(M^4)$ が与えられたとき，それらは何時 S^2 からの disjoint PL（TOP）embedding で表現出来るか。

本論では，これをホモロジーで扱える範囲で，しかも ∂M に現れる obstruction を考察する。Ohkawa [1] の mod. p- version でもある。

② 諸概念及諸定義 以下本論では，$R \ni 1$ は有理数体 Q の部分環，又ハ有理整数環の剰余環とする。

定義1．M^4 を4次元連結PL多様体とするとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\mu \in H_2(M, R)$ が $(s_1, \cdots s_\mu)$ – separable であるとは，（但し $s_1, \cdots s_\mu$ は非負整数列），M^4 内の多面体 K_{ij} $(i=1,2,\cdots \mu,\ j=0,1,\cdots s_i)$ で，次の4条件を満たすものが存在するときに云う。

i) $K_{i0} \subset K_{i1} \subset \cdots \subset K_{is_i} \quad (i=1,2,\cdots \mu)$

ii) $\alpha_i \in Im\,(H_2(K_{i0}, R) \xrightarrow{\imath_*} H_2(M, R))$
$(i=1,2,\cdots \mu)$, $\imath$: inclusion.

iii) $0 = \imath_* : H_1(K_{i,j-1}; R) \longrightarrow H_1(K_{i,j}; R)$
$(i=1,2,\cdots \mu;\ j=1,2,\cdots s_i)$, $\imath$: inclusion

iv) $K_{i0} \cap K_{js_j} = \phi \quad (i \neq j)$.

この第4の条件のかわりにより強い条件iv)'で置換える時,

iv)' $K_{is_i} \cap K_{js_j} = \phi \quad (i \neq j)$

$\alpha_1, \cdots \alpha_\mu$ は strongly $(s_1, \cdots s_\mu)$-separable であると呼ばれる. $(s, s, \cdots s)$-separable を略して s-separable, $\forall s$, s-separable なることを, ∞-separable と云う.

注意1. M^4 が向きづけられているとき, $\alpha_1, \cdots \alpha_\mu$ が 0-separable $\Leftrightarrow$ $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0 \quad (\forall i \neq \forall j)$

注意2. $\alpha_1, \cdots \alpha_\mu$ が S^2 からの disjoint PL embedding で表わされる時, これらは ∞-separable.
実際, $f_i : S^2 \to M^4$ を α_i を表わす disjoint な PL-embedding とすると, $K_{ij} = Im\, f_i = f_i(S^2) \quad (\forall i, j)$ と置けばよい.

注意3. 上記注意2は $\alpha_1, \cdots \alpha_\mu$ が S^2 からの disjoint <u>topological</u> embedding で表わされている時も成立する

Gを群とするとき

$\Gamma_1 G = G$, $\Gamma_{g+1} G = [\Gamma_g G, G]$, $\Gamma_1^{(n)} G = G$,

$\Gamma_{g+1}^{(n)} G = [\Gamma_g^{(n)} G, G] \cdot (\Gamma_g^{(n)} G)^n$, 但し,

X^n: $\{x^n \mid x \in X\}$ から生成された部分群

$$\mathcal{L}_g(G, R) = \begin{cases} (\Gamma_g G / \Gamma_{g+1} G) \otimes R & (R \subset \mathbb{Q}) \\ \Gamma_g^{(n)} G / \Gamma_{g+1}^{(n)} G & (R = \mathbb{Z}_n) \end{cases}$$

空間Xに対し,

$\hat{\pi}_1(X)$: Xの弧状連結成分ごとの基本群の自由積

$\mathcal{L}_g(X, R) = \mathcal{L}_g(\hat{\pi}_1(X), R)$ とする.

この時, 次が成立する.

命題1. $\mathcal{L}_*(-, R)$ は, (基点を有せぬ) 空間の圏から, R上の次数付 Lie algebra の圏への関手となる

証明. $[\Gamma_g G, G]$ で割ることは基本群の作用を消すから.

図 以上の準備のもとに次の結果を述べる事が出来る.

定理. M4: 4次元PL多様体で, 連結で, しかも係数環Rが $R \neq \mathbb{Z}_2$ の時は向き付可能, さらに compact とする.

この時 M4 が

i) $H_1(M4, R) = 0$

ii) $H_2(M4, R) = R^\mu$ (μ: 非負整数)

iii) $\exists(\alpha_1, \dots \alpha_\mu)$: $H_2(M4, R)$ の basis で

S- separable なものが存在する.

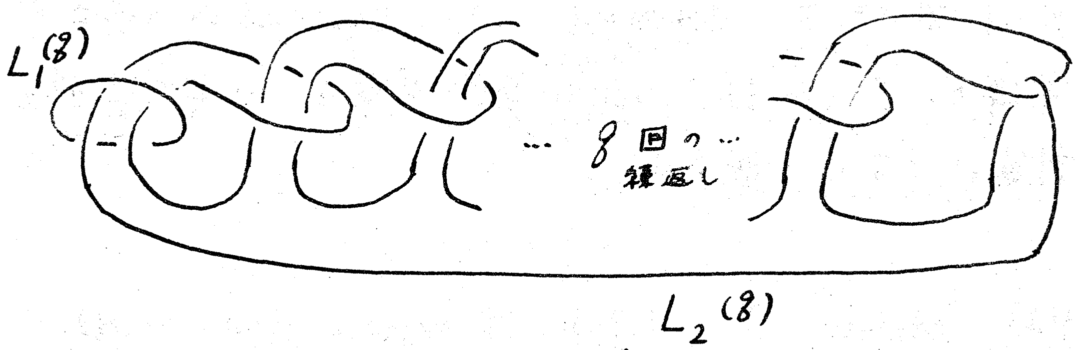
の3条件を満たすならば, ∂M について

$$\mathcal{L}_g(\partial M, R) \approx \mathcal{L}_g(F^{\mu}, R) \quad (g \leq S)$$

を満たす. 但し F^{μ}: rank μ の自由群.

㊟ 応用 S^3 の μ-成分 link $L = \cup_{i=1}^{\mu} L_i$ に対して, 各成分 L_i に沿って 2-handle を p_i-framed で attaching したものを $W_L = W(L; p_1, \cdots p_\mu)$ と書き, さらに L_i に対応する $H_2(W_L, R)$ の元を α_i と書く.

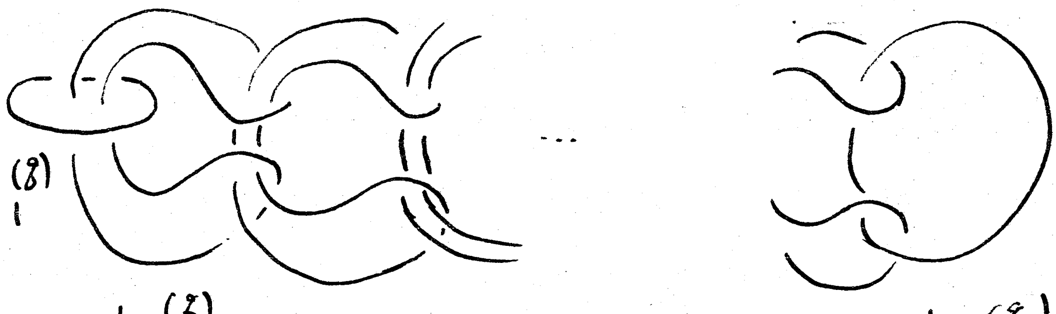
<u>例1</u>. $L = L^{(g)}$ を Milnor [M2] の link とする



$L^{(1)}$ が Whitehead link である.

この時 $W(L^{(g)}, m, n)$ に於いて, $(m, n) > 1$ とするとき, α_1, α_2 は $\forall k$ に対し, $(k, g-1)$- separable であるが, $(2g+1)$- strongly separable でない.

例2. $L = L^{(g)}$ を Milnor [M1] の link とする



このとき

$W_L = W(L^{(g)}, n_1, \cdots\ n_g)$ に於いて

$(n_1, \cdots\ n_g) > 1$ のとき, $\alpha_1, \cdots \alpha_g$ は どの $g-1$ 個の元も strongly ∞-separable であるが, 全体として $(g-1)$-separable でない. 以上の2例は計算によるが, 略する.

[M1] Milnor, J, Link Groups, Ann. Math. 59 (1954) 177−195

[M2] ——, Isotopy of Links, Algebraic Geometry and Topology, Princeton univ. Press Princeton, (1957).

[OhKawa]. Homological separating, topological embeddings, and the Milnor $\bar{\mu}$-invariants

of links, preprint.